Ce qu'il faut savoir en 1re spécialité

N'hésitez pas à me contacter à l'adresse `clement@dehesdin.net` pour me signaler toute coquille ou erreur que vous pourriez trouver.

1. Fonction polynôme du second degré

Une fonction $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ tel que $a \neq 0$ est dite **polynomiale du second degré** (ou simplement trinôme) et son graphe est une parabole orienté vers le haut si $a > 0$ et vers le bas sinon.

Pour étudier les variations d'une telle fonction, on détermine le sommet de la parabole atteint en $\alpha = -\frac{b}{2a}$ correspondant au point où la fonction atteint son extremum : auquel cas la fonction croît jusqu'au sommet puis décroît si $a < 0$, ou l'inverse sinon. On peut d'ailleurs lire les coordonnées $(\alpha; \beta)$ de ce sommet sur la forme canonique du trinôme étant $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$.

En revanche, pour étudier son signe, le trinôme est de même signe que a, sauf entre ces racines lorsqu'elles existent. Celles-ci sont déterminées en calculant le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ du trinôme : dès lors, le trinôme admet soit deux racines distinctes $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ si $\Delta > 0$, une racine double $x = -\frac{b}{2a}$ si $\Delta = 0$ ou aucune racine réelle sinon. Lorsque cette équation a des racines distinctes ou confondues, leur somme est égale à $-\frac{b}{a}$ et leur produit à $\frac{c}{a}$. Lorsque le trinôme admet des racines réelles x_1 et x_2, celles-ci figurent dans son écriture factorisée : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ avec éventuellement $x_1 = x_2$ dans le cas d'une racine double.

2. Les suites numériques

Une **suite** u est une fonction sur l'ensemble $\mathbb{N}_{\geqslant p}$ des entiers naturels supérieurs à $p \in \mathbb{N}$. Elle peut être définie par une formule explicite lorsque u_n s'exprime directement en fonction de n, ou par une relation de récurrence lorsque u_{n+1} s'exprime en fonction de u_n accompagnée de la donnée de son premier terme.

Pour étudier le **sens de variation** de la suite u, on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$ pour tout n : la suite est croissante si cette différence est positive, sinon la suite est décroissante.

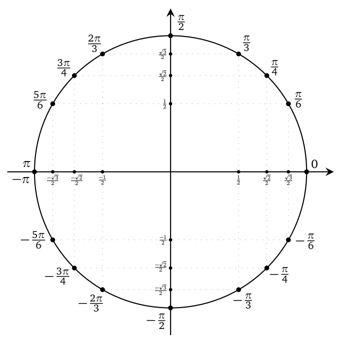
La suite u est dite **arithmétique** si chaque terme (sauf le premier) est obtenu en ajoutant au terme précédent un réel r, appelé **raison** : d'où la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + r$ et la formule explicite $u_n = u_p + (n-p)r$ où u_p désigne le premier terme de la suite. Une telle suite est croissante si la raison r est positive et décroissante sinon. La somme de ces termes est donnée par la formule :

$$u_p + \ldots + u_n = (n - p + 1)\frac{u_p + u_n}{2}.$$

En revanche, une telle suite est dite **géométrique** si chaque terme (sauf le premier) est obtenu en multipliant au terme précédent un réel q, appelé **raison** : d'où la relation de récurrence $u_{n+1} = q\,u_n$ et la formule explicite $u_n = u_p \times q^{n-p}$ où u_p désigne le premier terme de la suite. Une telle suite est croissante si la raison $q > 1$, constante si $q = 1$ et décroissante si $0 < q < 1$. La somme de ces termes est donnée par la formule :

$$u_p + \ldots + u_n = u_p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1-q}.$$

3. La trigonométrie et ses fonctions



Le **cercle trigonométrique** est un cercle de rayon 1, centré à l'origine du plan et utilisé pour définir les fonctions **sinus** et **cosinus**. Sur ce cercle, un angle θ correspond à un point de coordonnées $(\cos(\theta), \sin(\theta))$ où les valeurs $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ sont respectivement les fonctions cosinus et sinus évaluées en θ.

Ces fonctions sont 2π-périodiques, c'est-à-dire qu'elles se répètent tous les 2π radians, et elles sont liées par $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$ d'où les inégalités $-1 \leqslant \cos(\theta) \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin(\theta) \leqslant 1$.

Par conséquent, les fonctions sinus et cosinus ont des comportements symétriques : cos est une fonction paire tandis que sin est une fonction impaire.

4. La dérivation et son application

Soit f une fonction définie sur $I \subseteq \mathbb{R}$ et $a \in I$.

Si f est dérivable en un point a, cela signifie que le **taux d'accroissement** $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite quand h tend vers 0, notée $f'(a)$ et appelée **nombre dérivé**.
Ce nombre dérivé $f'(a)$ est le **coefficient directeur de la tangente** au graphe de f au point $(a, f(a))$ dont l'**équation réduite** est : $y = f'(a)(x-a)+f(a)$.

Lorsque f est dérivable en tout point de I, on dit que f est dérivable sur I et la fonction qui à x associe le nombre dérivé $f'(x)$ est appelée **fonction dérivée** de f et sera noté f'.

Les fonctions d'usage courant sont un empilement de fonction usuelles liées entre elles par des additions, des multiplications, des passages à l'inverse et des compositions : en considérant deux fonctions dérivables u et v et $\lambda \in \mathbb{R}$ un réel quelconque, on obtient :

$$(u+v)' = u'+v', \quad (\lambda u)' = \lambda u', \quad (uv)' = u'v+uv', \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2} \quad \text{et} \quad (u \circ v)' = v' \cdot (u' \circ v).$$

Leur dérivation repose donc sur la connaissance des dérivées des fonctions usuelles de base :

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \quad \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, \quad \cos'(x) = -\sin(x) \quad \text{et} \quad \sin'(x) = \cos(x).$$

Pour déterminer les variations d'une fonction, il suffit d'étudier le signe de sa dérivée : la fonction est croissante lorsque la dérivée est positive, décroissante si elle est négative, et constante si elle est nulle. Dès lors, f admet un extremum $f(a)$ atteint en a lorsque que sa dérivée s'annule en a en changeant de signe.

5. La fonction exponentielle

La **fonction exponentielle**, notée $\exp(x)$, est la seule fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que sa dérivée est égale à elle-même, et qui vaut 1 en 0. Le nombre $e = \exp(1) \approx 2,711828$ est une constante irrationnelle appelée **nombre d'Euler** ou **constante de Néper**, et on utilise souvent la notion e^x pour $\exp(x)$.

Elle transforme les produits en sommes $e^{x+y} = e^x e^y$, ce qui entraîne notamment que $e^{nx} = (e^x)^n$ pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$ fixé, et $e^{y-x} = \frac{e^y}{e^x}$ soit $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ pour $y = 0$.

Étant strictement positive et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, elle satisfait pour tous réels a et b les relations :

$$e^a \leqslant e^b \iff a \leqslant b, \quad e^a \geqslant e^b \iff a \geqslant b \quad \text{et} \quad e^a = e^b \iff a = b.$$

6. Probabilités conditionnelles et variables aléatoires

La **probabilité conditionnelle** d'un évènement A sachant qu'un évènement B est réalisé, noté $p_B(A)$, mesure la probabilité que A se produise lorsque B est réalisé : $p_B(A) = \frac{p(A\cap B)}{p(B)}$ si $p(B) \neq 0$. Si A et B sont **indépendants**, la réalisation de l'un n'influence pas l'autre donc $p_B(A) = p(A)$ soit $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$. Par ailleurs, si les évènements B_1, ..., B_n forment une partition de l'univers, la **formule des probabilités totales** permet d'exprimer $p(A)$ sous la forme : $p(A) = \sum_{i=1}^n p(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^n p_{B_i}(A)p(B_i)$.

Une **variable aléatoire** X associe un nombre réel à chaque issue d'une expérience aléatoire et, sa loi décrit toutes ses valeurs possibles et les probabilités associées à chacune.
Son **espérance** $\mathbb{E}(X) = \sum x_i P(X = x_i)$ est la moyenne de ces valeurs pondérée par leurs probabilités, tandis que sa **variance** $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}([X - \mathbb{E}(X)]^2)$ mesure la dispersion des valeurs autour de l'espérance, et son **écart-type** $\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$ indique l'écart moyen des valeurs par rapport à $\mathbb{E}(X)$.

7. Calcul vectoriel et géométrie repérée

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan tel que $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$ dans un repère orthonormé.

Le **produit scalaire** de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, mesure l'alignement de deux vecteurs : il sera positif si les vecteurs vont dans le même sens, négatif s'ils sont de sens contraire ou nul s'ils sont orthogonaux. Il peut se définir soit avec l'angle entre ces deux vecteurs $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$ donnant $\vec{u} \cdot \vec{v} = \pm \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ si les vecteurs sont colinéaires soit directement via leurs composantes $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.

Le produit scalaire est **symétrique** et **bilinéaire** c'est-à-dire que $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$ et $(\lambda\vec{u}+\mu\vec{v})\cdot\vec{w}=\lambda\vec{u}\cdot\vec{w}+\mu\vec{v}\cdot\vec{w}$ pour tout $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. Le développement de la norme d'une somme conduit à $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}$ et $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}$ la **formule d'Al-Kashi** qui généralise le théorème de Pythagore. Par conséquent, l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ (c'est-à-dire tels que $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont orthogonaux) est le cercle de diamètre $[AB]$ car il vérifie $\|AB\|^2=\left\|\overrightarrow{MA}\right\|^2+\left\|\overrightarrow{MB}\right\|^2$ par la formule d'Al-Kashi.

En géométrie analytique, le vecteur $\vec{n}\binom{a}{b}$ est **normal** à la droite d'équation $ax+by+c=0$, et $\vec{u}\binom{-b}{a}$ en est un **vecteur directeur**. Enfin, une équation cartésienne d'un cercle de centre $A(x_A,y_A)$ et de rayon r est $(x-x_A)^2+(y-y_A)^2=r^2$.