Travaux dirigés en 1re spécialité

N'hésitez pas à me contacter à l'adresse `clement@dehesdin.net` pour me signaler toute coquille ou erreur que vous pourriez trouver.

1. Fonction polynôme du second degré

Exercice 1 : Soit $f : x \mapsto x^2 - 2\lambda x - (1-\lambda^2)$ un trinôme définie sur $\mathbb{R}$. Nous appelons $\mathscr{C}$ le graphe de f : à chaque valeur de λ correspond une courbe $\mathscr{C}_\lambda$.

1°) Quelle est la forme de ces courbes ?

2°) Coupent-elles toujours l'axe des abscisses, quelle que soit la valeur de λ ?

3°) Construire la courbe qui représente y pour la valeur particulière $\lambda = 0$ (c'est-à-dire la courbe $\mathscr{C}_0$).

4°) Ces courbes $\mathscr{C}_\lambda$ ont un minimum. Quelles sont les coordonnées de ce minimum ? Comment se déplace ce minimum quand λ varie ?

Exercice 2 : La formule $f(x) = \sqrt{(x^3-1)(x-1)}$ peut-elle servir à définir une fonction f définie sur $\mathbb{R}$?

**************** Pour aller plus loin ****************

Exercice 3 : Soit m un réel et (E_m) l'équation d'inconnue x :

$$(E_m)\ :\ 2x^2 + (3m+1)x - m(m-1) = 0.$$

1°) Exprimer Δ_m, discriminant de (E_m), en fonction de m.

2°) Pour quelles valeurs de m l'équation (E_m) admet-elle au moins une solution ?

3°) Exprimer P_m, produit des solutions de (E_m), en fonction de m.

4°) Existe-t-il des valeurs de m pour lesquelles -2 est solution de (E_m) ?
Si oui, résoudre chacune des équations obtenues.

Exercice 4 : Déterminer, en fonction des paramètres réel a et λ, les racines du polynôme

$$P(t) = (\lambda+1)t^2 - 2at + \lambda - 1.$$

Étudier le signe de $P(t)$ en fonction de t.

2. Les suites numériques

Exercice 5 : Déterminer les 4 premiers termes des suites suivantes :

$$u_n = 2n^2 - n + 1 \qquad \text{et} \qquad v_n = \frac{2n+1}{2-3n}.$$

Exercice 6 : Dans cet exercice, on mettra en évidence la monotonie des suites.

1°) On considère la suite u définie par $u_n = \frac{3^n}{4}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite u est strictement croissante.

2°) La suite v est définie par $v_n = \frac{n}{2^{n+1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite v est strictement décroissante à partir du rang 2.

3°) Soit u la suite dont le terme de rang n est définie par $u_n = -32n + 102$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que cette suite est décroissante.

4°) Soit w la suite dont le terme de rang n est définie par $w_n = 2n - \frac{25}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la suite w est croissante.

Exercice 7 : Soit u la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n - u_n^2 - 1 \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1°) Compléter le tableau ci-contre :

n	0	1	2	3	4
u_n					

2°) Montrer que la suite u est décroissante.

Exercice 8 : Pour les suites suivantes, calculer les termes u_1 et u_2 :

1°) $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n+1} \end{cases}$ **2°)** $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = (u_n+1)^2 \end{cases}$ **3°)** $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n-1}{u_n} \end{cases}$

Exercice 9 : Étudier le sens de variation de chaque suite :

1°) $u_n = 2n+1$

2°) $u_n = \frac{3n}{2^n}$

3°) $u_n = \frac{3n+1}{2n+2}$

4°) $u_n = (n-5)^2, n \geqslant 5$

5°) $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n - n \end{cases}$

6°) $u_n = \frac{3n-2}{n+1}$

7°) $u_n = \frac{2^{3n}}{3^{2n}}$

Exercice 10 : Soit la suite arithmétique u définie sur $\mathbb{N}$ de raison $r = -2$ et de premier terme $u_0 = 15$.

1°) Écrire u_{n+1} en fonction de u_n.

2°) Écrire u_n en fonction de n.

3°) Calculer u_1 et u_{10}.

4°) Calculer la somme $S_{10} = u_0 + u_1 + \ldots + u_{10}$.

Exercice 11 : On considère deux suites u et v définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = \frac{3 \times 2^n - 4n - 3}{2} \qquad \text{et} \qquad v_n = \frac{3 \times 2^n + 4n + 3}{2}.$$

1°) Soit w la suite définie par $w_n = u_n + v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que la suite w est géométrique dont on précisera la raison.

2°) Soit t la suite définie par $t_n = u_n - v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que la suite t est arithmétique dont on précisera la raison.

3°) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{w_n + t_n}{2}$.

Exercice 12 : Soient a et b deux réels non nuls avec $a \neq 1$. Soit u la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = au_n + b.$$

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - \frac{b}{1-a}$.

Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison a.

**************** Pour aller plus loin ****************

Exercice 13 : On considère deux suites u et v définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{2n}.$$

1°) Vérifier que $u_1 = \frac{1}{2}$ et $u_2 = \frac{7}{12}$ puis calculer u_3, v_1, v_2 et v_3.

2°) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$$

et en déduire que la suite u est croissante.

3°) Démontrer que la suite v est décroissante.

Exercice 14 : On considère deux suites u et v définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{5}(u_n + 4v_n) \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} v_0 = -\frac{3}{4} \\ v_{n+1} = \frac{1}{5}(3u_n + 2v_n) \end{cases}.$$

1°) Calculer u_1 et v_1 puis u_2 et v_2.

2°) Soit w la suite définie par $w_n = 3u_n + 4v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $w_{n+1} = w_n$.

3°) En déduire v_n en fonction de u_n puis u_{n+1} en fonction de u_n et v_{n+1} en fonction de v_n.

Exercice 15 : On considère la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $u_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$. La suite (v_n) est définie par :

$$\begin{cases} v_1 = u_1 \\ v_2 = u_1 \times u_2 \\ v_n = u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n \end{cases}.$$

1°) Vérifier que l'on a $v_2 = \frac{2}{3}$ puis calculer v_3.

2°) Écrire v_{n+1} en fonction de v_{n-1} et de u_n.

3°) **a)** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < u_n < 1$.

c) Montrer que la suite v est décroissante.

4°) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} = v_n \times \frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2}$.

Exercice 16 : L'objectif de l'exercice est de déterminer le terme générale de la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0; u_1 = 0; u_2 = 1 \\ u_{n+3} = 2u_{n+2} - 2u_n \end{cases}.$$

(u_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 3, dont l'équation caractéristique est $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$

1°) Déterminer les réels α, β et γ tel que $x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x-1)(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)$, puis en déduire les solutions de l'équation $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$.

2°) Soient $q \in \mathbb{R}^*$ et (v_n) une suite géométrique de raison q et de terme initial $v_0 \neq 0$. Quelles sont les valeurs de q satisfaisant l'équation $v_{n+3} = 2v_{n+2} - 2v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$?

3°) Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Considérons la suite (w_n) définie par $w_n = \alpha + \beta(-1)^n + \gamma 2^n$.

a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+3} = 2w_{n+2} + w_{n+1} - 2w_n$.

b) Déterminer les valeurs de α, β et γ de sorte que $w_0 = 0$, $w_1 = 0$ et $w_2 = 1$.

4°) Conclure.

3. La dérivation et son application

Exercice 17 : Déterminer l'ensemble de définition et de dérivabilité puis calculer l'expression de la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = x^2 + 1 + x^{11} + x^{101}, \quad f_2(x) = (x^2+1)\sqrt{x}, \quad f_3(x) = \frac{1+x}{x-7},$$

$$f_4(x) = \frac{1-x^3}{(1+x)^2}, \quad f_5(x) = 2x^3 + |-4x+7|, \quad f_6(x) = x\,|x| \quad \text{et} \quad f_7(x) = \frac{x^2}{1+|x|}.$$

Exercice 18 : Déterminer l'ensemble de définition, étudier les variations et rechercher les extrema locaux de chacune des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = x^4 - x^2, \quad f_2(x) = x^5 - 5x^3 \quad \text{et} \quad f_3(x) = \frac{x}{1+x^2}.$$

Exercice 19 : On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{x^3-2}{x^2+1}$ et notons $\mathscr{C}_f$ sont graphe.

1°) Donner l'ensemble de définition de f puis étudier la parité de f.

2°) Déterminer la dérivée de f.

3°) On considère maintenant la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 + 3x + 4$.

a) Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}$.

b) Calculer $g(-1)$ puis en déduire le signe de $g(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

4°) Déduire des questions précédentes le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

5°) Étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Exercice 20 : Soient f la fonction $x \mapsto \frac{-x^2+2x-1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

1°) Déterminer les abscisses des points de la courbe $\mathscr{C}_f$ où la tangente est horizontale.

2°) Existe-t-il des points de la courbe $\mathscr{C}_f$ où la tangente admet un coefficient directeur égale à -2 ?

3°) Déterminer les abscisses des points de la courbe $\mathscr{C}_f$ où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = -\frac{2}{3}x - 5$.

Exercice 21 : Soient f la fonction $x \mapsto x^3 + x^2 + x + 1$ définie sur $\mathbb{R}^*$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

1°) Montrer que pour tout réel x, $f(x) = (x+1)(x^2+1)$.

2°) En déduire le signe de $f(x)$ en fonction des valeurs de x.

3°) Déterminer la dérivée de f.

4°) Étudier le signe de $f'(x)$ en fonction des valeurs de x.

5°) Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

6°) $\mathscr{C}_f$ admet-elle un autre point où la tangente est parallèle à celle de la question précédente ?

Exercice 22 : On se propose d'étudier le minimum de

$$E(a,b) = \sqrt{a+b}\left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}\right)$$

où a et b sont des réels strictement positifs. On pose $x = \frac{b}{a}$.

1°) Montrer que $E(a,b) = f(x)$ où $f(x) = \sqrt{x+1}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

2°) Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$ et montrer qu'elle admet un minimum égal à m pour $x = x_0$ où m et x_0 sont des réels à déterminer.

3°) En déduire le minimum de $E(a,b)$ et les valeurs de (a,b) pour lesquelles ce minimum est atteint.

Exercice 23 : On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2+(m-2)x-10}{x^2-2x-3}$, dans laquelle x est la variable et m un paramètre.

1°) Pour quelles valeurs de m la fonction f a-t-elle un maximum et un minimum ? Pour quelles valeurs de m la fonction f n'a-t-elle ni maximum ni minimum ? Quand il en est aini, la fonction est-elle toujours croissante ou toujours décroissante ?

2°) Que devient la fonction pour $m = -7$ et pour $3m = 7$? Construire le graphe de f pour $3m = 7$?

3°) Montrer que, lorsque m varie, la courbe de f passe par un point fixe A situé sur un des axes. Déterminer m de façon que la tangente en A à la courbe correspondante soit parallèle à la droite $20x + 9y = 0$. Construire cette courbe.

4°) On coupe la courbe $\mathscr{C}$ construire au **2°)** par une parallèle D à l'axe des abscisses, d'ordonneé λ. Pour quelles valeurs de λ cette parallèle coupe-t-elle $\mathscr{C}$?

4. La trigonométrie et ses fonctions

Exercice 24 : Soit θ un angle. En raisonnant géométriquement sur le cercle trigonométrique :

1°) Calculer $\cos\theta$ et $\sin\theta$ pour $\theta \in \left\{0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right\}$;

2°) Exprimer $\cos(-\theta)$, $\sin(-\theta)$, $\cos(\pi \pm \theta)$, $\sin(\pi \pm \theta)$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \theta\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \theta\right)$ en termes de $\cos\theta$ et $\sin\theta$;

3°) Montrer à l'aide du théorème de Pythagore que l'on a $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$;

4°) Montrer, en utilisant des triangles semblables, que l'on a, lorsque les rapports trigonométriques dont il est question ont tous un sens (quand est-ce le cas ?) :

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad \text{et} \quad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}.$$

Exercice 25 : L'inéquation $|\cos x| + |\sin x| > 2$ admet-elle au moins une solution ?

Pour rappel, les formules d'additions du cosinus et du sinus devant être connues parfaitement, s'écrivent, pour tous a et b réels,

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \quad \text{et} \quad \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a).$$

Exercice 26 : Soit θ un angle. Établir les formules de Carnot :

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta) \quad \text{et} \quad \sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta).$$

Exercice 27 : Soient α, β deux angles. Montrer que, lorsque tous les rapports trigonométriques et les expressions algébriques ont un sens (quand est-ce le cas ?), on a :

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}.$$

Exercice 28 : Soit θ un angle. Montrer que, lorsque tous les rapports trigonométriques et les expressions algébriques ont un sens (quand est-ce le cas ?), on a :

$$\cos 2\theta = \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}, \quad \sin 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta} \quad \text{et} \quad \tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}.$$

Exercice 29 : Après avoir rappelé les formules d'addition d'arcs, montrer que l'on a, pour toute paire d'angles p, q, les formules de Simpson :

$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} \quad \text{et} \quad \sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}.$$

Écrire des formules semblables pour $\cos p + \cos q$ et $\cos p - \cos q$.

Exercice 30 : Soit $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ tel que $\cos(x) = -\frac{3}{5}$. Déterminer la valeur de $\sin x$ et $\tan x$.

5. La fonction exponentielle

Exercice 31 : Simplifier chaque expression :

$$A = e \times e^{2x-1} - (e^x)^2, \qquad B = (e^{-x})^2\sqrt{e^{4x}}, \qquad C = \frac{e^x e^{1-2x}}{e}.$$

Exercice 32 : Démontrer que chacune des égalités suivantes est vérifié pour tout réel x :

1°) $e^{-2x} + \frac{1}{e} = \frac{1+e^{2x-1}}{e^{2x}}$

2°) $(e^x + e^{-x})^4 - (e^{2x} + e^{-2x})^2 + 4 = 4(e^x + e^{-x})^2$

3°) $\frac{(e^x+1)^2 - (e^x-1)^2}{4e^x} = 1$

Exercice 33 : Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$e^{x^2} = (e^x)^2 \qquad \text{et} \qquad e^{\frac{2x+1}{x-3}} = e^{x+1}.$$

Exercice 34 : Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

1°) $f : x \mapsto \frac{x-e^x}{e^x+1}$

2°) $f : x \mapsto (2-x^2)e^x$

3°) $f : x \mapsto 7e^x(e^x - x^3 + 5x)$

4°) $f : x \mapsto \frac{e^x}{x}$

Exercice 35 : Donner les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x^2 - 4x + 1)e^x$.

Exercice 36 : Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = e^{-x^2+\sqrt{2}x+10}, \qquad f_2(x) = e^{e^x-1}, \qquad f_3(x) = e^{-\cos(x)} + e^{17}, \qquad f_4(x) = \frac{\sin(x)}{x^2e^x}.$$

**************** Pour aller plus loin ****************

Exercice 37 : Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^n e^{-x}$. On note $\mathscr{C}_{f_n}$ son graphe.

1°) Étudier les variations de f_1.

2°) Montrer qu'il existe deux points communs à toutes les courbes $\mathscr{C}_{f_n}$. Déterminer les variations de f_n.

3°) On note $\mathscr{T}_n$ la tangente à $\mathscr{C}_{f_n}$ au point d'abscisse 1. Démontrer que pour $n \geqslant 2$, $\mathscr{T}_n$ coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(\frac{n-2}{n-1}, 0)$.

Exercice 38 : On considère les fonctions

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

définies sur $\mathbb{R}$.

I/ 1°) Étudier la parité des fonctions f, g et h.

2°) Montrer que $f'(x) = g(x)$ et que $g'(x) = f(x)$ pour tout réel x. En déduire les variations de f et g.

3°) Montrer que $h(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$, en déduire que $h(x) = 1 - \frac{2}{e^{2x}+1}$. Étudier alors les variations de h.

II/ Établir les propriétés suivantes, valables pour tous réels x et y :

1°) $f^2(x) - g^2(x) = 1$.

2°) $f(x+y) = f(x)f(y) + g(x)g(y)$ et $g(x+y) = g(x)f(y) + f(x)g(y)$.

3°) $f(2x) = f^2(x) + g^2(x) = 1 + 2g^2(x) = 2f^2(x) - 1$ et $g(2x) = 2g(x)f(x)$.

Exercice 39 :

I/ Sachant que $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ pour tout entier $n > 0$ ($n!$ est appelée factorielle de n), on pose $f(x) = (1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!})e^{-x}$ pour tout x de $[0,1]$.

1°) Dériver $f(x)$ et étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0,1]$.

2°) Calculer $f(0)$ et exprimer $f(1)$ en fonction de n.

3°) Expliquer alors pourquoi $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} < e$.

II/ On rappelle l'identité $(a^n - b^n) = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$.

1°) Écrire la somme $S(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n$ pour $x \neq 1$ sous la forme d'un quotient.

2°) Dériver les deux formes de $S(x)$.

3°) En déduire la valeur de $A = 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + \ldots + 16 \cdot 2^{15}$.

Exercice 40 : La fonction exponentielle est supposé inconnue : on admet qu'il existe au moins une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, vérifiant :

$$(1) : \begin{cases} (\forall x \in \mathbb{R}) : f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

donc, par la suite, f désignera une telle fonction dont le but est d'établir diverses propriétés.

I/ 1°) Démontrer que la fonction $x \mapsto f(x) \cdot f(-x)$ est constante sur $\mathbb{R}$.

2°) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq 0$ et $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$.

3°) À l'aide d'un raisonnement par l'absurde, justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$.

II/ *Le but de cette question est d'établir l'unicité d'une fonction vérifiant les conditions* (1).

On suppose qu'il existe une fonction g vérifiant les conditions (1). La question 1.b. permet de définir la fonction $h : x \mapsto \frac{g(x)}{f(x)}$ sur $\mathbb{R}$. Démontrer que h est constante sur $\mathbb{R}$ puis conclure.

On peut donc maintenant énoncer la définition suivante : La seule fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant les conditions (1) est appelée *fonction exponentielle*, noté exp.

III/ Étude de la fonction exp.

1°) Étudier les variations de exp sur $\mathbb{R}$.

2°) Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe de exp au point d'abscisse 0 et étudier la position relative de $\mathscr{C}_{\exp}$ par rapport à cette tangente.

IV/ Relation fonctionnelle.

1°) Soit $x, y \in \mathbb{R}$ fixé. Puisque $\exp x \neq 0$, on peut considérer la fonction g_y, définie sur $\mathbb{R}$ par $g_y(x) = \frac{\exp(x+y)}{\exp(x)}$. Démontrer que la fonction g_y est constante sur $\mathbb{R}$.

2°) En déduire que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$.

3°) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(nx) = \exp(x)^n$.

6. Probabilités conditionnelles et variables aléatoires

Exercice 41 : Un couple de parents a deux enfants dont vous ignorez le sexe. On suppose qu'il y a équiprobabilité pur qu'un enfant soit une fille ou un garçon. On considère les évènements :

- A l'évènement : « les deux enfants sont de sexes différents » ;
- B l'évènement : « l'ainé est une fille » ;
- C l'évènement : « le cadet est un garçon ».

Montrer que les évènements A, B et C sont deux à deux indépendants.

Exercice 42 : Pour chaque variable aléatoire ci-dessous, donner $X(\Omega)$.

1°) X est le nombre de PILE obtenus en lançant quatre fois consécutives une pièce équilibrée.

2°) X est le minimum des nombres obtenues en lançant deux dés équilibrés.

3°) X est le rang du premier PILE pour une succession infinie de lancers de pièces et X prend la valeur 0 si aucun PILE n'apparaît.

4°) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n est le nombre de fois que l'on obtient 6 en lançant n fois un dé.

Exercice 43 : On considère la variable aléatoire X, dont la loi de probabilité est :

valeurs de X	1	5	8	10
probabilités	$0,2$	p	q	$0,1$

Déterminer les valeurs de p et q, de sorte que l'espérance de X soit égale à $5,6$.

**************** Pour aller plus loin ****************

Exercice 44 : Sonia débute un jeu dans lequel elle a autant de chance de gagner ou de perdre la première partie. On admet que, si elle gagne une partie, la probabilité qu'elle gagne la partie suivante est $0,6$ et si elle perd une partie, la probabilité pour qu'elle perde la partie suivante est $0,7$.

On note, pour tout entier naturel n non nul :

- G_n l'évènement : « Sonia gagne la $n^{\text{ième}}$ partie » ;
- P_n l'évènement : « Sonia perd la $n^{\text{ième}}$ partie ».

I/ 1°) Déterminer les probabilités $p(G_1)$, $p_{G_1}(G_2)$ et $p_{P_1}(G_2)$.

2°) Calculer $p(G_2)$.

3°) En déduire $p(P_2)$.

II/ On pose pour tout entier naturel n non nul, $x_n = p(G_n)$ et $y_n = p(P_n)$.

1°) Déterminer, pour tout entier naturel n non nul, les probabilités $p_{G_n}(G_{n+1})$ et $p_{P_n}(G_{n+1})$.

2°) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul :

$$\begin{cases} x_{n+1} = 0,6x_n + 0,3y_n \\ y_{n+1} = 0,4x_n + 0,7y_n \end{cases}$$

3°) Pour tout entier naturel n non nul, on pose $v_n = x_n + y_n$ et $w_n = 4x_n - 3y_n$.

a) Montrer que la suite (v_n) est constante de terme générale égale à 1.

b) Montrer que la suite (w_n) est géométrique et exprimer w_n en fonction de n.

4°) a) En utilisant la définition des suites (v_n) et (w_n), montrer que $w_n = 4x_n - 3(v_n - x_n)$.

b) En déduire que $x_n = \frac{3v_n + w_n}{7}$ et $y_n = \frac{4v_n - w_n}{7}$.

c) Donner les expressions de x_n et de y_n en fonction de n.