Ce qu'il faut savoir en Tle spécialité

N'hésitez pas à me contacter à l'adresse `clement@dehesdin.net` pour me signaler toute coquille ou erreur que vous pourriez trouver.

1. Raisonnement par récurrence

Le **raisonnement par récurrence** est un principe de démonstration, visant à établir une proposition portant sur un ensemble d'entiers naturels. Pour un énoncé $P(n)$ qui porte sur un entier n et n_0 un certain entier fixé, si $P(n_0)$ est vrai et si pour tout $n \geqslant n_0$, $P(n) \implies P(n+1)$, alors $P(n)$ est vrai pour tout entier $n \geqslant n_0$.

2. Les fonctions réelles

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions et notons $\mathscr{C}$ le graphe de f.

La fonction $f \circ g$ est la fonction obtenue en appliquant la fonction g à un élément donnée, puis d'appliquer f à ce résultat : elle est définie si g est à valeurs dans I. Sa dérivée est donnée par $g' \cdot (f' \circ g)$ et, si f et g sont monotones de même sens de variation alors $f \circ g$ est croissante sinon décroissante si leurs sens de variations sont opposées.

Pour étudier la forme d'un graphe, on utilise la convexité/concavité de sa fonction : f est **convexe** sur I si son graphe $\mathscr{C}$ reste sous chacun des segments reliant deux de ses points ; elle est **concave** lorsque l'inégalité est inversée. Lorsque f est dérivable, la convexité correspond au fait que sa dérivée croît (ou bien $f'' \geqslant 0$ si f est deux fois dérivable) et que $\mathscr{C}$ reste au-dessus de ces tangentes, tandis que la concavité correspond au critères opposés. Un **point d'inflexion** est un point où f change de convexité, souvent marqué par un changement de signe de f'', et où la tangente traverse $\mathscr{C}$.

On utilise la continuité d'une fonction pour savoir si son graphe peut être tracé sans lever le crayon : f est **continue** sur I si elle l'est en tout point a de I c'est-à-dire $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
Les fonctions couramment utilisées, obtenues à partir des fonctions usuelles par somme, produit, quotient, puissance ou composition, sont continues sur leur ensemble de définition et comme toute fonction dérivable est continue, elles le sont également lorsqu'elles sont dérivables. Lorsque f est une continue sur $[a, b]$, l'existence d'au moins une solution de l'équation $f(x) = k$ d'inconnue x avec k fixé compris entre $f(a)$ et $f(b)$ est assurée par le théorème des valeurs intermédiaires, et si f est de plus strictement monotone, le théorème de la bijection assure qu'elle est unique. Ce résultat peut aussi être appliqué lorsque l'intervalle $[a, b]$ est ouvert ou semi-ouvert, auquel cas $f(a)$ ou $f(b)$ est remplacé par $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ ou $\lim\limits_{x \to b} f(x)$.

3. Vers l'infini et au-delà

Il est possible d'opérer sur les limites : on peut les additionner, les multiplier et les inverser. Cependant, il y a des limites à ces opérations : les formes indéterminées qui sont $\infty - \infty$, $\infty \cdot 0$, $\frac{0}{0}$ et $\infty \cdot \infty$. Pour lever ces indéterminations, on utilise les limites usuelles et les croissances comparées. Ces dernières permettent de comparer les fonctions logarithme, puissance et exponentielle : en considérant $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$, les croissances comparées sont les suivantes :

$$\lim_{x \to 0^+} x^\alpha \ln(x)^\beta = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)^\beta}{x^\alpha} = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty \quad \text{et} \lim_{x \to -\infty} x^\beta e^{\alpha x} = 0.$$

4. Loi binomiale

Dans de nombreuses situations, on étudie des expériences aléatoires à deux issues (obtenir « pile » ou « face » par exemple). Une **épreuve de Bernoulli** modélise ce type d'épreuve en attribuant à la variable aléatoire X la valeur 1 en cas de succès avec probabilité p et la valeur 0 en cas d'échec avec probabilité $1 - p$.

Lorsque l'on répète n fois de telles épreuves indépendantes, le nombre total de succès suit la **loi binomiale** de paramètre n et p. Plus précisément, pour tout entier $i \in [\![0, n]\!]$, la probabilité d'obtenir k succès est donnée par $p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. Son espérance est $E(X) = np$ et sa variance est $Var(X) = np(1-p)$.

5. Primitives d'une fonction

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction où I désigne un intervalle non vide de $\mathbb{R}$.

Il existe un processus inverse à la dérivation, autrement plus difficile : la primitivation ! Alors, une fonction $F : I \to \mathbb{R}$ est **une primitive** de f sur I (parfois noté $\int f$), si F est dérivable sur I de dérivée f.

Par conséquent, connaître les règles de dérivation des fonctions d'usage courant permet, par lecture inverse, d'établir un formulaire de primitives :

$$\int x^\alpha = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \quad \int \frac{1}{x} = \ln|x|, \quad \int 2\sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad \int \cos(x) = \sin(x) \quad \text{et} \quad \int \sin(x) = -\cos(x).$$

Cependant, il n'existe pas de formule générale pour primitiver un produit, un quotient ou la composé de deux fonctions, mais en considérant deux fonctions u et v, et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ deux réels quelconque, on obtient : $\int (\lambda u + \mu v) = \lambda \int u + \mu \int v$.
Primitiver une fonction repose donc sur le principe de reconnaître une fonction comme dérivée d'une autre.

6. Équations différentielles linéaires

Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et f une fonction définie sur un intervalle I.

Une **équation différentielle** — *équadiff* en abrégé — du premier ordre est une équation $y' = ay + f$ dont l'inconnue est une fonction y et dans laquelle cohabitent à la fois y et sa dérivée y'.

En désignant par y_0 une solution particulière de l'équation différentielle $y' = ay + f$, les solutions sur I de cette équation sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^{ax} + y_0$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \mapsto \lambda e^{ax}$ est la solution de l'équation homogène $y' = ay$.
Si la fonction $f : x \mapsto b$ est constante, on qualifie l'équation $y' = ay + b$ d'*équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants* et ces solutions sont les fonctions $x \mapsto \lambda e^{ax} - \frac{b}{a}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $-\frac{b}{a}$ représente la solution particulière.